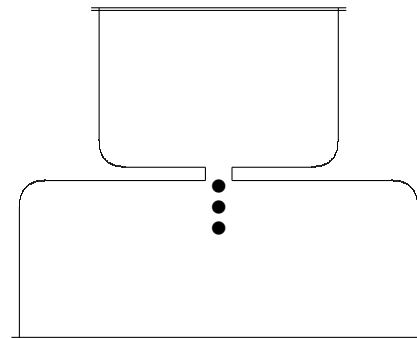


## Задание

Лилипуты нашли в кармане камзола Гулливера интересные песочные часы и решили взвесить их. Они взгромоздили их на площадку пружинных весов так, что весь песок оказался в верхней половине колбы. Сразу после того, как посыпался песок, лилипуты зафиксировали, что показания весов начали изменяться. Однако вскоре стрелка установилась на определенном значении и вновь начала двигаться, когда стали падать самые последние песчинки. Попробуйте помочь лилипутам разобраться и промоделировать этот процесс.



Пусть в колбе весов находится 1000 песчинок массой 1 г каждая. Размерами песчинок будем пренебрегать.

Пусть высота падения для каждой песчинки одинакова и составляет 5 см.

Пусть интервал, с которым падают песчинки, составляет 2% от времени полета.

Пусть удар о дно колбы – абсолютно неупругий и его продолжительность равна 4% времени полета. Считайте, что верхняя и нижняя чаши часов имеют цилиндрическую форму (см. рис). Песок насыпается в нижнюю чашу тонким слоем, так что песчинки при падении соударяются с чашей, а не друг с другом.

1. Для начала определите показания весов в случае, если падает только одна песчинка. Нарисуйте качественно (на компьютере или от руки) график зависимости веса песочных часов от времени. Укажите на нем все характерные точки.

2. Напишите программу вычисления зависимости веса часов от времени в реальной ситуации, когда высыпаются все песчинки.

Указание: чтобы промоделировать процесс, представьте себе, что изменится, если будут падать 2 песчинки, 3 песчинки и так далее. Задайте массив моментов времени  $\Delta t_i$ , в которые происходят изменения показаний весов и вычислите вес часов для каждого значения. Результаты представьте в виде таблицы или графика.

### Представление результатов.

1. Ответы на вопросы задачи обязательно должны быть представлены в рукописном пояснении (на листах чистовика).

2. Для проверки должен быть представлен программный проект. В специально выделенную папку должны быть скопированы (с помощью дежурного) все файлы проекта, а также исполняемый файл, в названии которого должна быть отражена фамилия участника (например, denjkov.exe).

3. В рукописном пояснении должны быть представлены физические соображения и математические выкладки, используя которые участник получил свой результат.

4. Также в рукописном пояснении обязательно нужно описать структуру созданной участником компьютерной программы. В идеале это описание должно

представлять собой алгоритм (укрупненный, без излишней детализации), кодируя который "простой программист" сможет не задумываясь повторить ход действий участника и прийти к тем же результатам. Такой алгоритм может быть представлен либо в виде блок-схемы, либо на псевдокоде, либо в виде перечня инструкций на естественном языке и т.д.

## Решение

### 1 песчинка

Рассмотрим сначала падение только одной песчинки.

В начальный момент времени все песчинки ( $N = 1000$  шт.) находятся в верхней колбе. Вес часов равен

$$P_0 = Nmg \approx 10000 \text{ Н.}$$

В момент выпадения песчинки вес системы уменьшается на вес этой песчинки и в продолжение ее полета будет равен

$$P_1 = (N - 1)mg \approx 9990 \text{ Н.}$$

Время падения найдем из уравнения движения  $\frac{gt^2}{2} = h$ . Получим  $t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

По прошествии найденного промежутка времени песчинка ударится о дно и показания весов изменятся. Из закона сохранения энергии  $mgh = \frac{mv^2}{2}$  найдем скорость частицы при ударе  $v = \sqrt{2gh}$ . Обозначим время удара через  $\tau$ . Тогда из второго закона Ньютона находим среднюю силу во время удара  $F = \frac{mv}{\tau} = \frac{m}{\tau} \sqrt{2gh}$ . Таким образом, в течение времени  $\tau$  после момента касания дна общий вес будет равен

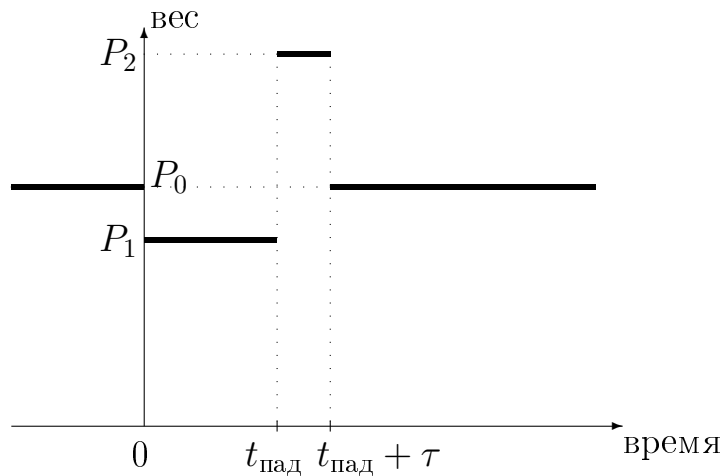
$$P_2 = Nmg + \frac{m}{\tau} \sqrt{2gh}.$$

С учетом связи  $\tau = 0.04t_{\text{пад}}$  получим

$$P_2 = Nmg + \frac{mg}{0.04} = (N + 25)mg \approx 10250 \text{ Н.}$$

Наконец, по прошествии времени удара вес системы вернется к своему начальному значению  $P_0$  и будет оставаться таковым до конца.

Осталось перенести результаты на график.

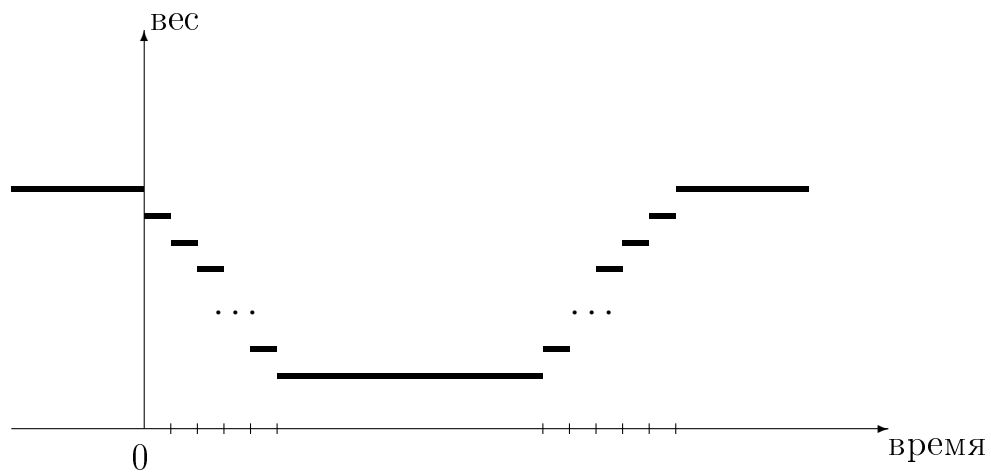


## Все песчинки

Рассмотрим сначала ситуацию, когда в момент удара ничего не происходит.

В этом случае сначала вес часов будет ступенчато уменьшаться. Ясно, что в момент достижения дна первой песчинкой из верхней колбы выпадет 50-ая. Начиная с этого момента времени вес будет некоторое время сохраняться без изменений, поскольку в полете всегда будет находиться 50 песчинок. В тот момент, когда из верхней колбы выпадет последняя песчинка, общий вес начнет ступенчато увеличиваться до тех пор, пока не сравняется с первоначальным.

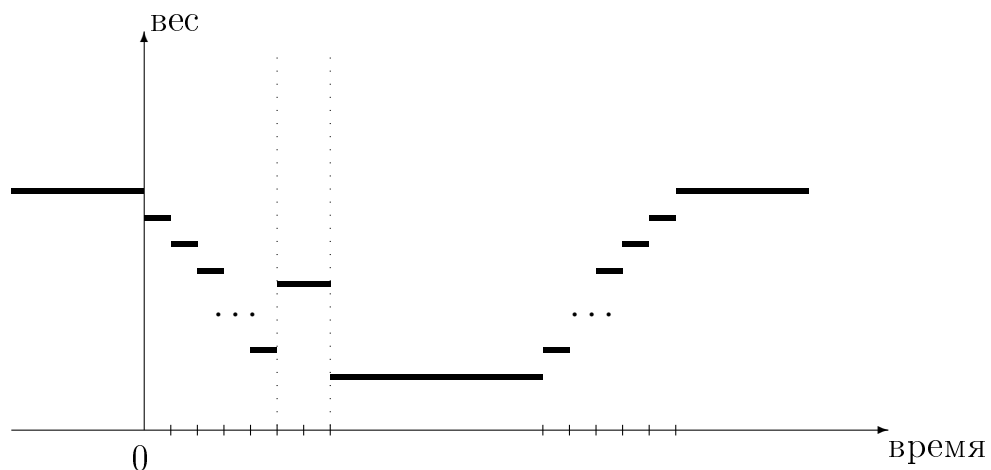
Соответственно, график (пока не окончательный) будет иметь вид



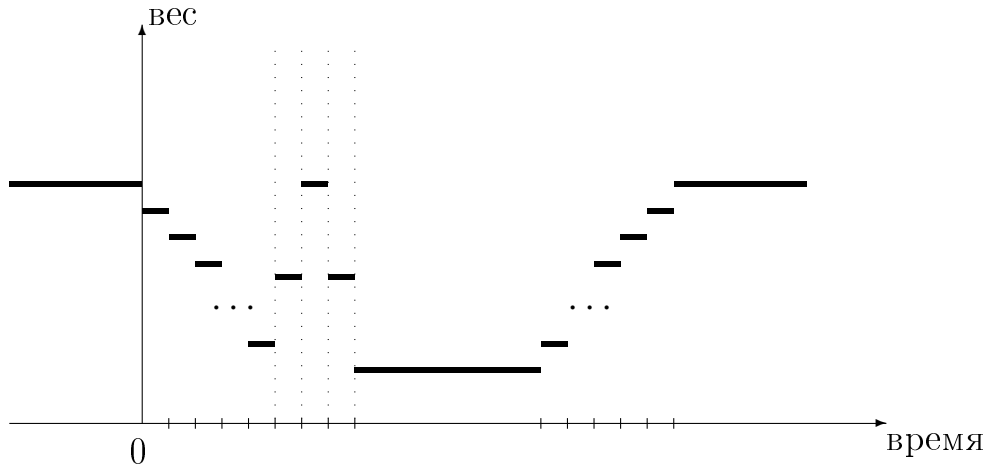
Легко видеть, что интервалы ступенчатого уменьшения (в начале) и увеличения (в конце) будут равны  $0.02t_{\text{пад}}$ , а началу и концу нижнего горизонтального участка соответствуют моменты времени  $t_{\text{пад}}$  и  $(1000 - 50) \cdot 0.02 t_{\text{пад}} = 19 t_{\text{пад}}$ .

Теперь будем добавлять на график удары песчинок о дно. Начнем с первой. Как мы уже выяснили, ее соударение с дном дает дополнительный вклад в общий вес  $\Delta P = \frac{m}{\tau} \sqrt{2gh} = 25mg$ . Этот вклад начинается в момент удара и продолжается в течение времени  $\tau = 0.04t_{\text{пад}}$ . Заметим, что за время  $\tau$  успевает вывалиться ровно две песчинки.

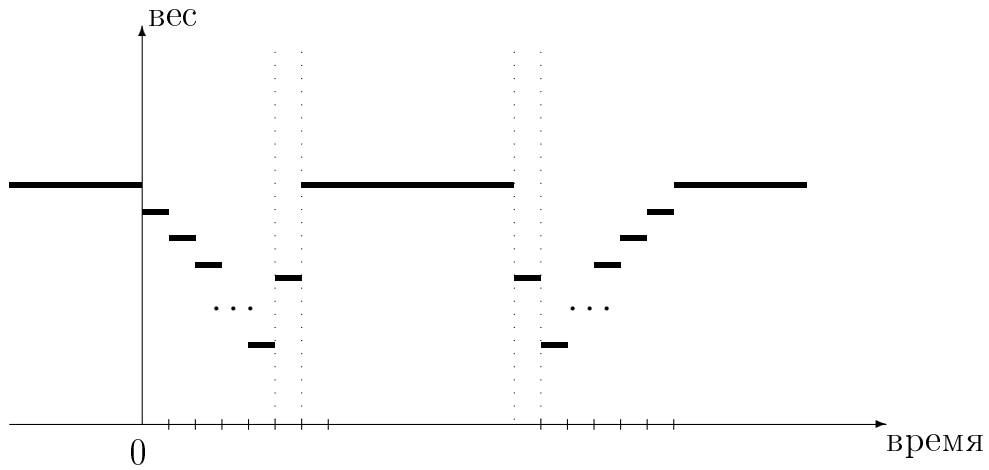
Добавляя указанную величину на график, получим следующее.



Добавление удара второй частицы приводит к графику



Добавляя (накладывая) на график третий, четвертый (и так далее) удары, приходим к итоговому результату.



Качественно построенный график можно описать, например, так.

Сначала лесенка из 50-ти ступеней вниз от начального уровня  $P_0 = Nmg$  до уровня  $P_1 = (N - 50)mg$ . Затем лесенка из 2-х ступеней вверх до начального уровня. В правой части графика (соответствующей заключительной части процесса) все наоборот. Средний горизонтальный участок начинается и заканчивается в моменты времени  $1.02 t_{\text{пад}}$  и  $18.98 t_{\text{пад}}$  соответственно.

Приведенное описание графика можно считать также самым общим описанием алгоритма расчета таблицы значений показаний весов.

Для проведения расчета можно, например, завести массив из 1050 элементов, которые будут соответствовать показаниям весов в моменты времени, идущие с шагом  $\Delta t = 0.02 t_{\text{пад}}$  и затем заполнить этот массив в соответствии с приведенным выше описанием.

## Некоторые принципы оценивания

В зависимости от степени продвижения по пути получения верных числовых ответов начисляется следующее количество баллов (по 100-бальной шкале).

1. Выполнено верное моделирование для одной песчинки – до 20 баллов.
2. Выполнено верное моделирование для нескольких песчинок, но общая закономерность не уловлена – до 30 баллов.
3. Создан алгоритмически верный программный код для расчета процесса с произвольным количеством песчинок, но не зафиксировано его верное использование (в т.ч. участник не смог запустить написанную программу) – до 50 баллов.
4. Проведены ”правдоподобные” компьютерные расчеты (т.е. процесс последовательного падения песчинок смоделирован, но содержит существенные недочеты) – до 80 баллов.
5. Более 80 баллов получает участник, представивший верный график зависимости веса часов от времени (для 1000 частиц). Количество баллов (до 100 включительно) зависит от степени обоснованности приведенного результата.
6. Формат представления результата – график или таблица; отрисовано на компьютере или от руки – на количество присуждаемых баллов не влияет.