

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

ВАРИАНТ 42101 для 10 класса

Вспомним старинный карпатский способ ловли Змея Горыныча: зимой заманить гада в колодец-западню и вызвать лавину, которая наглухо засыпет колодец снегом. Был ли этот способ когда-либо использован, неизвестно. Но известно мнение скептиков, утверждавших, что огнедышащий Змей растопит накрывший его снег и выберется на волю.

Попробуем разобраться в этом процессе.

Будем считать, что над Змеем, сидящим на дне колодца, расположен цилиндрический столб снега, имеющий высоту $H = 10$ м и площадь поперечного сечения $S = 4$ м². Плотность снега $\rho = 300$ кг/м³, удельная теплота плавления $\lambda = 334 \cdot 10^3$ Дж/кг.

Также будем считать, что Змей Горыныч обладает начальным запасом теплорода (создающего выдыхаемое пламя) $M = 40$ кг, удельная теплота сгорания которого $W = 400 \cdot 10^5$ Дж/кг. За один огнедышащий выдох Змей извергает ровно треть оставшегося запаса теплорода. Поскольку, как известно из биологии, Горынычи не теплокровные и, находясь под снегом, могут впасть в спячку, то при каждом огнедышащем выдохе Змею необходимо тратить количество теплоты $E = 10^5$ Дж на собственный обогрев. Все остальное тепло полностью идет на плавление снега, при этом каждый раз снег плавится по всей своей площади, и высота снежного цилиндра уменьшается на некоторую величину.

1. Найдите высоту слоев снега, растопленных при первом и при втором огнедышащих выдохах.
2. Найдите общее количество огнедышащих выдохов, тепло которых пойдет на плавление снега.
3. Определите, сможет ли Змей Горыныч выбраться из западни.
4. Найдите (с точностью до 1 кг), какой минимальный запас теплорода нужен для спасения из западни.

Дополнение

В приведенном выше описании никак не учитывается, что происходит с водой, в которую превращается расплавленный снег. Например, можно считать, что вся вода моментально впитывается в стенки колодца и не участвует в тепловых процессах. Это весьма сильное допущение, но его приходится делать, чтобы упростить модель. Полученные числовые результаты будут грубым, но, тем не менее, адекватным приближением к правильным показателям.

РЕШЕНИЕ ВАРИАНТА 42101 для 10 класса

Будем считать все выдохи, о которых пойдет речь ниже, огнедышащими.

1. Пусть Змей Горыныч имеет запас теплорода M_1 . За первый выдох он истратит $\frac{1}{3}M_1$ теплорода, выделив при этом количество теплоты $Q_1 = \frac{W M_1}{3}$. Согласно условию, из всего выделенного тепла на плавление снега пойдет $Q_1 - E$.

Обозначим массу расплавленного снега через m_1 . Тогда $Q_1 - E = \lambda m_1$, откуда

$$m_1 = \frac{Q_1 - E}{\lambda}.$$

В соответствии с условием, расплавленная масса снега представляет собой цилиндр с основанием S , высотой D_1 и плотностью снега в нем ρ . Таким образом,

$$m_1 = S D_1 \rho.$$

Поэтому за первый выдох Змей растапливает часть снежного столба высотой

$$D_1 = \frac{m_1}{S \rho} = \frac{Q_1 - E}{\lambda S \rho}.$$

Подставив в эту формулу числа, получим ответ на самый первый вопрос.

Обозначим высоту снежного столба в колодце перед первым выдохом через x_1 (по условию $x_1 = H$). После выдоха она станет равна $x_2 = x_1 - D_1$.

2. После первого выдоха Горыныч будет обладать запасом теплорода

$$M_2 = \frac{2}{3}M_1,$$

поскольку одна треть уже истрачена.

Дальнейшие рассуждения аналогичны пункту 1 (но все величины теперь будут иметь индекс 2). Поэтому за второй выдох растопится вторая часть снежного столба высотой

$$D_2 = \frac{m_2}{S \rho} = \frac{Q_2 - E}{\lambda S \rho},$$

где $Q_2 = \frac{W M_2}{3}$. Подставив в эту формулу числа, получим вторую часть ответа на первый вопрос.

3. Дальнейшие рассуждения будут циклически повторять описанное выше.

На k -ом шаге цикла будем вычислять высоту очередной растопленной части

$$D_k = \frac{Q_k - E}{\lambda S \rho}, \quad \text{где} \quad Q_k = \frac{W M_k}{3},$$

и затем пересчитывать остаток теплорода M_{k+1} и высоту оставшегося снежного столба $x_{k+1} = x_k - D_k$.

Если величина x_{k+1} получится отрицательной, то это будет означать, что весь снег растоплен и Горыныч свободен.

Если же запас M_{k+1} окажется таким, что $Q_k = \frac{W M_{k+1}}{3} \leq E$, то тепла для топления снега не останется. Это будет означать, что Горыныч навсегда останется в снежном плену.

4. После всего сказанного можно написать алгоритм вычислений.

Будем использовать переменную-ключ Key для хранения информации о состоянии процесса и о том, чем он завершился.

Если $Key = 0$, то Горыныч бодр и продолжает процесс плавления снега.

Если $Key = 1$, то Горыныч истратил все силы и не может продолжать плавить снег.

Если $Key = 2$, то Горыныч расплавил весь снег и выбирается на волю.

Начало алгоритма

Положить $k := 1$; $Key = 0$; $E := 10^5$; $W = 400 \cdot 10^5$;
 $H = 10$; $S = 4$; $\rho = 300$; $\lambda = 334 \cdot 10^3$;
 $M_1 = 40$;

ПОКА $Key = 0$;

Вычислить количество теплоты $Q_k = \frac{1}{3}WM_k$;

ЕСЛИ $Q_k < E$ ТО $Key := 1$;

ИНАЧЕ

Вычислить высоту растопленного слоя $D_k = \frac{Q_k - E}{\lambda S \rho}$;

Вычислить высоту оставшегося снега $x_{k+1} = x_k - D_k$;

Вычислить остаток теплорода $M_{k+1} = \frac{2}{3}M_k$;

Увеличить счетчик $k := k + 1$;

ЕСЛИ $x_k < 0$ ТО $Key := 2$; КОНЕЦ_ЕСЛИ

КОНЕЦ_ЕСЛИ

КОНЕЦ_ПОКА

Сохранить количество выдохов $N = k - 1$;

Вывести D_1 и D_2 ;

Вывести N ;

Вывести Key ;

Конец алгоритма

6. Для получения ответа на 4-й вопрос можно действовать подбором. Будем запускать программу при различных значениях M_1 и следить за тем, когда значение ключа Key на выходе станет равным 2. Например, можно сначала запускать программу при $M_1 = 50, 60, 70$ и т.д. Так мы узнаем, что при $M_1 = 100$ спасения нет, а при $M_1 = 100$ есть. Затем в найденном диапазоне можно уточнить начальный запас с точностью до 1 кг.

7. Если провести расчеты по приведенным алгоритмам, то получим следующий округленный

Ответ:

1. $D_1 = 1.33$ м, $D_2 = 0,89$ м.

2. Змей не выберется (растопит лишь 4 м снега) и истратит на плавление снега 22 выдоха.

3. При указанных данных Змей не спасется (растопит лишь ≈ 4 м снега).

4. Минимально необходимое количество теплорода 101 кг.