

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17091 для 9 класса

1. На прокладке линии электропередачи работают три бригады с постоянной интенсивностью. Первая и третья бригады, работая вместе, за месяц прокладывают 15 км линии. Все три бригады вместе могут проложить за месяц линию в два раза длиннее, чем вторая и первая бригады вместе. Сколько километров линии в месяц может проложить третья бригада, если известно, что вторая бригада вместе с третьей прокладывают участок пути в четыре раза быстрее, чем его проложила бы одна вторая бригада?

Ответ. 9 км.

2. Решите задачу из VIII книги “Начал” Евклида. Пусть числа x_1, \dots, x_{2021} связаны равенствами (по Евклиду — непрерывной пропорцией)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{2020}}{x_{2021}},$$

причем $x_1 = 2^{2022}$, $x_{2021} = 4$. Найдите x_2, \dots, x_{2020} .

Ответ. $x_k = 2^{2023-k}$ или $x_k = (-2)^{2023-k}$, $k = 1, \dots, 2021$.

3. На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y = x + 2021$ и пересекает кривую $y = 1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j), y_1(j))$ и $(x_2(j), y_2(j))$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Рассмотрим два произведения

$$P_1 = y_1(1)y_1(2) \cdots y_1(N) \quad \text{и} \quad P_2 = y_2(1)y_2(2) \cdots y_2(N).$$

Выясните, какие значения может принимать величина P_1P_2 и как это значение зависит от N .

Ответ. если N чётно, то $P_1P_2 = 1$; если N нечётно, то $P_1P_2 = -1$.

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены две точки, соответственно, M и K так, что периметр треугольника MKS равен удвоенной стороне квадрата. Найдите угол MAK .

Ответ. 45°

5. В конце XIX в. немецкий математик (он родился и вырос в Санкт-Петербурге) Георг Кантор доказал, казалось бы, парадоксальный факт: между множеством и его подмножеством можно установить взаимно однозначное соответствие. Так, в частности, можно каждому целому числу k поставить в соответствие натуральное число $N(k)$, которое будет номером числа k , причем все номера (натуральные числа) будут использованы. Укажем первые пары такого соответствия:

$$N(0) = 1, N(1) = 2, N(-1) = 3, N(2) = 4, N(-2) = 5, N(3) = 6, N(-3) = 7, \dots$$

Решите следующие уравнения

А) $N(x) = 2021$,

Б) $N(x) - N(y) = 2021$.

Ответ. А) $x = -1010$.

Б) $(x, y) = (-(1011 + n), n), (1011 + m, -m), n \in \mathbb{N}, m \geq 0$.