10 класс. Задача 1

На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y = x + 2021$ и пересекает кривую $y = 1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j), y_1(j))$ и $(x_2(j), y_2(j))$ $(j = 1, 2, \dots, N)$. Рассмотрим два произведения

$$P_1 = y_1(1)y_1(2)\cdots y_1(N) \ \text{ и } \ P_2 = y_2(1)y_2(2)\cdots y_2(N).$$

Решите уравнение $\operatorname{tg} z = P_1P_2$ и выясните, как это решение зависит от N.

Решение

Прямые имеют уравнения $y = x + b_j$. Найдем точки их пересечения с указанной кривой: $1/x = x + b_j$, $x^2 + b_jx - 1 = 0$. Имеем

$$x_1(j)x_2(j) = -1, \ \ y_1(j)y_2(j) = 1/(x_1(j)x_2(j)) = -1, \ \ P_1P_2 = (-1)^N \in \{-1,\ 1\}.$$

Таким образом, если N четно, то $\operatorname{tg} z = P_1P_2 = 1$, откуда $z = \pi/4+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Если N нечетно, то $\operatorname{tg} z = P_1P_2 = -1$, откуда $z = -\pi/4 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: если N четно, то $z = \pi/4 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
если N нечетно, то $z = -\pi/4 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

10 класс. Задача 2

Выясните, может ли уравнение $x^2 + px + q = 0$ иметь целые корни, если p и q целые нечетные.

Решение

Пусть x_1 и x_2 — целые корни уравнения. Тогда $c = ax_1x_2$, и оно нечетное. Отсюда следует, что каждое из чисел a, x_1 и x_2 - нечетное. Тогда поскольку сумма двух нечетных чисел $a+c$ - четная, а сумма $a+b+c$ нечетная, то число b — тоже нечетное. Но с другой стороны, число b должно быть четным, так как $b = -a(x_1+x_2)$, а сумма двух нечетных чисел x_1+x_2 – четная. Противоречие.

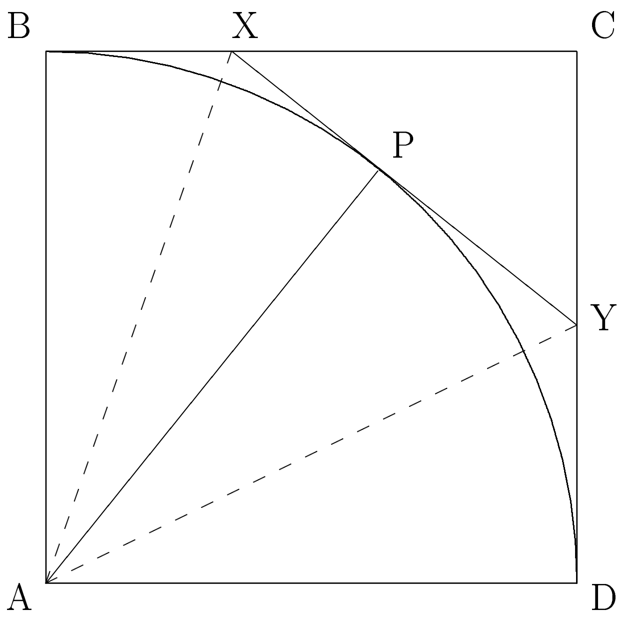
Ответ. Не могут.

10 класс. Задача 3

На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены две точки, соответственно, X и Y так, что периметр треугольника AXY равен удвоенной стороне квадрата. Найдите сумму косинуса и синуса угла XAY.

Решение

Задача решается просто, если сообразить, что отрезок XY является касательной к окружности с центром в точке A и радиуса, равного стороне квадрата. Обозначим точку касания через P.



Так как угол BAX равен углу XAP, а угол PAY равен углу YAD, то угол XAY равен 45°. Получаем $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ = \sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

10 класс. Задача 4

Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, если переменные удовлетворяют неравенствам

$$|2x + y| \le b, \quad |2x - y| \ge b$$

(где b – фиксированное вещественное число).

Решение

1. Если $b < 0$, то множество решений системы неравенств пусто. Функция не определена.

2. Если $b = 0$, то неравенства равносильны ур-ю $ax + y = 0$, откуда $f(x, -ax) = g(x) = (1 + a^2)x^2$. Минимум равен минимуму ф-ции $g(x)$, т. е. $g(0) = 0$.

3. Пусть $b > 0, a = 0$. Тогда система нер-в равносильна ур-ю $|y| = b$ и $f(x, y) = f(x, |b|) = x^2 + b^2 \ge b^2$. Минимум равен b^2.

4. Пусть $b > 0, a > 0$. Тогда получаем систему ограничений

$$-b - ax \le y \le b - ax, \qquad (y \le ax - b \;\text{ или }\; y \ge ax + b).$$

Она задает на плоскости область между двумя парал. прямыми $y = -b - ax$ и $y = b - ax$ и вне ромба с вершинами $(0; \pm b), (\pm b/a; 0)$. Ф-я f есть квадрат расстояния от нач коорд-т до точки области. Точки с одинак. расстоянием от O образуют окр. Минимум расстояния имеют точки касания сторон ромба со вписанной в ромб окр. Найдем ее радиус r.

Рассмотрим площадь ромба $S = d_1 d_2/2$. Его диагонали имеют длины $d_1 = 2b/a$, $d_2 = 2b$, $S = 2b^2/a$, сторона — $c = \sqrt{b^2 + (b/a)^2} = b\sqrt{a^2+1}/a$. Рассм. площадь прямоуг. треуг-ка с катетами b/a, b, составляющего четверть ромба,

$$S_\Delta = S/4 = b^2/(2a) = (1/2)cr = b\sqrt{a^2+1}/(2a).$$

Отсюда

$$r = \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}, \quad f_{min} = r^2 = \frac{b^2}{a^2+1}.$$

5. Случай $b > 0, a < 0$ аналогичен предыдущему и приводит к такому же рез-ту.

6. Объединяя результаты пп. 3–5, получаем короткий

Ответ. Если $b < 0$, то ф-я f не определена. Если $b \geq 0$, то

$$f_{min} = \frac{b^2}{a^2+1}.$$

10 класс. Задача 5

При решении некоторой задачи с натуральным параметром n получена дробь

$$\frac{101n + 25}{57n + 14}.$$

При каких n дробь можно сократить?

Решение

Пусть числитель и знаменатель делятся на $m \neq 1$. Тогда их разность тоже делится на m. Тогда получаем

$$101n + 25 - 57n - 14 = 44n + 11 \;\vdots\; m,$$

$$57n + 14 - 44n - 11 = 13n + 3 \;\vdots\; m,$$

$$44n + 11 - 13n - 3 = 31n + 8 \;\vdots\; m,$$

$$31n + 8 - 13n - 3 = 18n + 5 \;\vdots\; m,$$

$$18n + 5 - 13n - 3 = 5n + 2 \;\vdots\; m,$$

$$13(5n+2) - 5(13n+3) = 11 \;\vdots\; m.$$

Следовательно, $m = 11$. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} 101n + 25 = 11k, \\ 57n + 14 = 11l. \end{cases} \tag{*}$$

Умножив 1-е равенство системы на 57, а 2-е – на 101 и вычитая из 1-го 2-е, получим равенство

$$57k - 101l = 1 \tag{**}$$

Находим решение уравнения в натуральных числах (это можно сделать, используя алгоритм Евклида или подбором):

$$l = 22, \quad k = 39.$$

Алгоритм Евклида дает наименьшую такую пару. Найдем все такие пары чисел. Для этого составим равенство

$$57k - 101l = 1 = 57k' - 101l'.$$

Отсюда получаем $\dfrac{101}{57} = \dfrac{k' - k}{l' - l}$. Поскольку числа 101 и 57 взаимно простые, получаем, что любая пара чисел, удовлетворяющая равенству (**), будет иметь вид

$$l' = 22 + 57a, \quad k' = 39 + 101a,$$

где a – натуральное число. Подставив их в систему (*), находим n:

$$\begin{cases} 101n + 25 = 11(39 + 101a), \\ 57n + 14 = 11(22 + 57a). \end{cases}$$

Тогда $n = 4 + 11a$.

Ответ. Дробь сократима при $n = 4 + 11a$ для целых неотрицательных a.