

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17081 для 8 класса

Решение

Задача 1

Стройотряд «Сдвинем горы!» провел акцию по сбору отработанных батареек. Когда командир считал суммарное количество, у него получилось 200 батареек, а каждый из остальных бойцов получил суммарно по 195. Позже выяснилось, что каждый считавший забыл учесть те батарейки, которые принес сам. Сколько всего батареек собрал стройотряд, если он состоит из десяти бойцов и одного командира, а батарейки принесли все его члены?

Решение

Если сложить все полученные суммы вместе, то вклад каждого (из 11-ти участников) будет учтен 10 раз. Поэтому

$$S = \frac{200 + 10 \cdot 195}{10},$$

где S – сумма вкладов каждого, т.е. общее количество батареек. Таким образом,

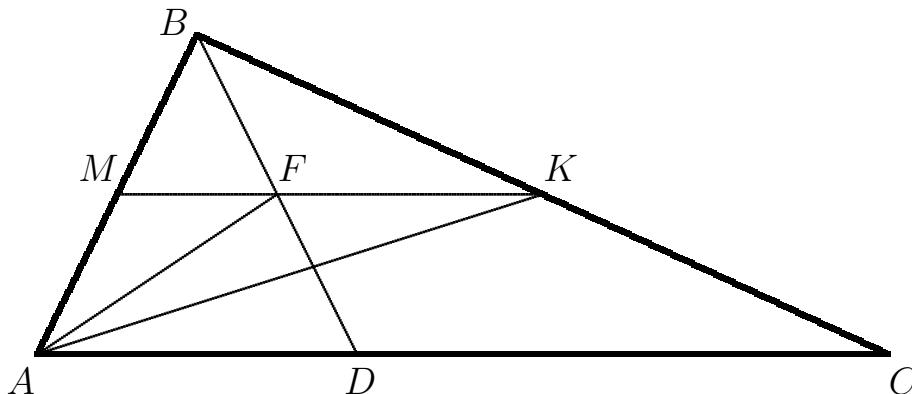
$$S = 20 + 195 = 215.$$

Ответ: 215.

Задача 2

В треугольнике ABC биссектриса BD пересекается со средней линией KM (точка K лежит на BC , а M на AB) в точке F , причем $AF = FK$. Докажите, что AK – биссектриса $\angle FAD$.

Решение



Треугольник AFK равнобедренный, следовательно, $\angle FAK = \angle FKA$. Поскольку средняя линия параллельна основанию, то $\angle FKA = \angle KAD$ как накрест лежащие. Таким образом, $\angle FAK = \angle KAD$, иными словами, AK – биссектриса $\angle FAD$.

Задача 3

Верно ли, что среди любых 2022-х целых чисел можно выбрать два, разность которых кратна 2021?

Решение

При делении на 2021 может возникать 2021 различных остатков (0, 1, 2, ..., 2020). Поскольку чисел 2022 (т.е. на одно больше, чем возможных остатков), то хотя бы два из них имеют равные остатки. Следовательно, их разность разделится на 2021 нацело.

Задача 4

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{2022} \right] + \left[\frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022} \right] = x^{2022} + x - 1.$$

Решение.

Докажем, что если x целое, d натуральное, то

$$\left[\frac{x}{d} \right] + \left[\frac{x+1}{d} \right] + \dots + \left[\frac{x+d-1}{d} \right] = x. \quad (*)$$

Представим x в виде $x = kd + m$, где $k \in \mathbb{Z}$ (неполное частное), $m \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ (остаток). Тогда величины

$$\left[\frac{x}{d} \right], \left[\frac{x+1}{d} \right], \dots, \left[\frac{x+(d-m-1)}{d} \right]$$

будут равны k . Их количество равно $d - m$.

Величины

$$\left[\frac{x+(d-m)}{d} \right], \dots, \left[\frac{x+(d-1)}{d} \right]$$

будут равны $k + 1$. Их количество равно m .

Итого получаем

$$\left[\frac{x}{2022} \right] + \left[\frac{x+1}{2022} \right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022} \right] = k \cdot (d-m) + (k+1) \cdot m = kd + m = x.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$x = x^{2022} + x - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^{2022} = 1,$$

которое имеет два решения $x = \pm 1$.

Ответ. $x = -1, 1$.

Задача 5

Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали Торопыжка, Пончик и Сиропчик. Незнайка опросил свидетелей и установил следующее.

- (1) Если Пончик ел корм, то Сиропчик не ел его.
- (2) Свидетельства о том, что Пончик не ел и что Торопыжка не ел корм не могут быть истинными одновременно.
- (3) Если Сиропчик не ел корм, то Пончик не ел его, а Торопыжка ел.

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить или оправдать в поедании ночью целого куля собачьего корма?

Решение.

Если Пончик ел корм, то из (1) и (3) следует, что Пончик не ел корм. Следовательно, Пончик не ел.

Тогда из (2) следует, что Торопыжка ел корм.

Утверждения о том, что Сиропчик ел корм, также как и о том, что Сиропчик не ел корм могут быть истинными при выполнении **всех** условий (1) – (3).

Таким образом, Торопыжка ел корм, Пончик не ел, а про Сиропчика сделать вывод невозможно.

ИЛИ

Составим таблицу всех вариантов

	Пончик	Сиропчик	Торопыжка	
1	ел	ел	ел	невозможно в силу (1)
2	ел	ел	нет	невозможно в силу (1)
3	ел	нет	ел	невозможно в силу (3)
4	ел	нет	нет	невозможно в силу (3)
5	нет	ел	ел	
6	нет	ел	нет	невозможно в силу (2)
7	нет	нет	ел	
8	нет	нет	нет	невозможно в силу (2)

Ответ. Пончик не ел, Торопыжка ел, а про Сиропчика сделать вывод невозможно.