Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап.

РЕШЕНИЕ
ВАРИАНТ 27991 для 9-го класса

1. Школьники решили провести любопытный эксперимент. Они заморозили воду в виде ледяного куба с ребром 10 см и 1000 кубиков с длиной ребра 1 см. В распоряжении школьников было два одинаковых идеальных термостата, в которых постоянно поддерживалась температура 0 °С. Школьники поместили большой куб в один термостат, а все маленькие кубики аккуратно разложили в один слой во втором так, чтобы они не касались друг друга. Время таяния льда в каждом термостате определялось от момента появления первой капли воды до полного превращения льда в воду. Сравните время таяния льда в двух термостатах. Объясните свои выводы.

Решение:

Количество теплоты, поступающее в куб в единицу времени, пропорционально площади его поверхности, т.е. квадрату длины его ребра, а количество теплоты, необходимое для плавления куба, пропорционально его объему, т.е. кубу длины его ребра. Поэтому время, необходимое для плавления куба, пропорционально длине его ребра. При разбиении куба на 1000000 = 100·100·100 одинаковых кубиков длина ребра каждого кубика оказывается в 100 раз меньше длины ребра исходного куба. Поэтому миллион одинаковых кубиков растают в сто раз быстрее, чем исходный куб. Если куб разбивается на кубики разных размеров, то время плавления всех кубиков будет определяться размером наибольшего из получившихся кубиков.

Ответ: маленькие кубики растают быстрее в 100 раз.

2. Два тела, массы которых равны m_1 и $m_2 = 2m_1$, начинают двигаться в поле силы тяжести. В начальный момент времени их скорости взаимно перпендикулярны и равны, соответственно, v_1=3 м/с и v_2=4 м/с. Через некоторый промежуток времени скорость первого тела стала равна нулю. Найдите скорость второго тела через тот же промежуток времени. Сила сопротивления движению отсутствует.

Решение.

За время остановки первой частицы она получила импульс силы, равный $-\vec{p}_1$, а вторая $-2\vec{p}_1$. Отсюда новый импульс второй частицы $\vec{p}_2^{/} = \vec{p}_2 - 2\vec{p}_1$, а модуль её скорости

$$v_2^{/} = \frac{1}{2m_1}\sqrt{\left(2m_1v_2\right)^2 + \left(2m_1v_1\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2v_2\right)^2 + \left(2v_1\right)^2} = 5 \text{ м/с.}$$

Ответ: 5 м/с.

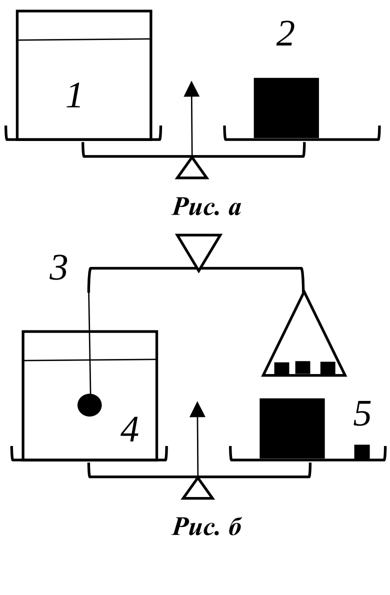


Рис. а

Рис. б

3. Кастрюля с водой *1* уравновешена на рычажных весах с помощью гири *2* (см. рис. *а*). В воду опускают металлический шарик *4*, подвешенный на легкой нити (см. рис. *б*) так, что он не касается дна и стенок кастрюли. Нить привязана к коромыслу *3* вторых весов, равновесие которых достигается при помещении на правую чашку трех одинаковых гирек *5*. Определите плотность материала шарика, если для уравновешивания весов с кастрюлей к гире *2* необходимо добавить одну гирьку *5*. Плотность воды ρ = 1000 кг/м^3.

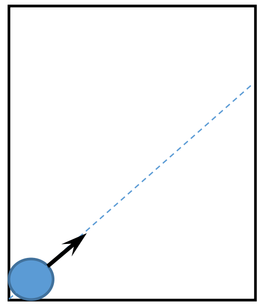
Решение:

m – масса маленькой гирьке, она равна массе вытесненной жидкости. m0 – масса шарика. По закону Архимеда:

$m_0 - m = 3m$
$m_0 = 4m$
Следовательно, плотность шарика равна 4ρ=4000 кг/м^3

Ответ: 4000 кг/м^3

4. Горизонтальный стол с идеально гладкой поверхностью имеет размеры 182×387 см. Стол со всех сторон огорожен вертикальными идеально упругими бортиками. По столу могут прямолинейно и равномерно двигаться шайбы диаметром 2 см. Первая шайба в начальный момент времени располагается в положении *A* (касаясь двух бортиков стола одновременно) и начинает движение со скоростью 5 м/с под углом 45° к бортику (см. рис). Вторая шайба стартует из того же положения *A* через 1 с в том же направлении. Определите минимальную скорость второй шайбы, при которой она успеет догнать первую шайбу до того момента, когда первая шайба коснется двух бортиков одновременно.



Решение:
Рассмотрим движение центра масс шайбы. Его движение при всех столкновениях со стенками можно рассмотреть, как движение материальной точки по полю меньшего размера – 180×385 см.
В точке первого удара (угол падения равен углу отражения!) зеркально отобразим поле стола. Таким же образом поступим в точках последующих соударений шайбы с бортиками. В результате построим развертку «зазеркалья» отражая поле стола от его стенок. При этом траектория шайбы отображается в прямую линию, то есть задача становится полностью одномерной. Отметим, что угол наклона траектории к любой стороне поля будет равен 45°.
Найдем, когда эта прямая пройдет через первый угол стола (не считая точки старта). Для этого необходимо отразить стол столько раз, чтобы получился квадрат, стороны которого удовлетворяют соотношению

$$180a = 385b,$$

где *a, b* — минимально достижимые натуральные числа, а шайба двигалась бы строго по диагонали этого квадрата.

После деления на общий множитель 5 (легко виден) получаем

$$36a = 77b,$$

где 36 и 77 – взаимно простые числа. Поэтому решение

$$a = 77, \quad b = 36.$$

Таким образом, пройденный шайбой путь будет равен

$$S = \sqrt{(180\cdot 77)^2 + (385\cdot 36)^2} = \sqrt{(5\cdot 36\cdot 77)^2 + (5\cdot 77\cdot 36)^2} = 5\cdot 77\cdot 36\cdot\sqrt{2} = 19601[\text{см}] = 196[\text{м}].$$

Найдем скорость второй шайбы из уравнения:

$$\frac{S}{\upsilon_1} = \frac{S}{\upsilon_2} + t_0,$$

откуда

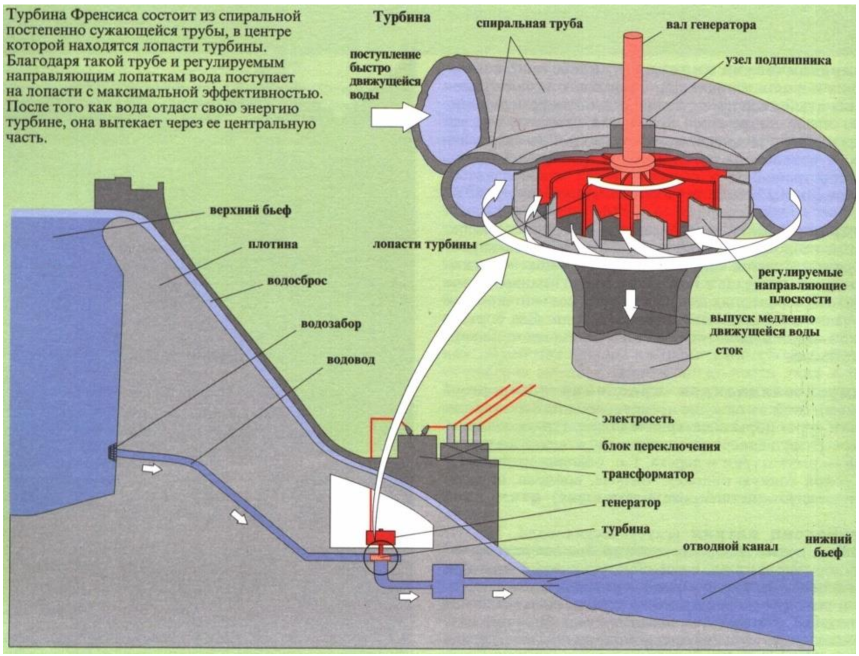
$$\upsilon_2 = \frac{S}{\frac{S}{\upsilon_1} - t_0} = \frac{S\upsilon_1}{S - \upsilon_1 t_0}.$$

Окончательно

$$\upsilon_2 = \frac{S\upsilon_1}{S - \upsilon_1 t_0} = \frac{196\cdot 5}{196 - 5\cdot 1} = 5{,}13\,\text{м/с}$$

Ответ: 5,13 м/с

5. Потребление энергии из электрической сети всегда выше в так называемые пиковые часы – утром и вечером, а в остальное время значительно снижается. Поэтому мощность электрогенераторов необходимо изменять. На ГЭС применяют специальные поворотные лопатки (см. рис.), которые направляют водяной поток на колесо гидротурбины. Определите, во сколько раз изменится мощность гидрогенератора, если площадь сечения отверстий между поворотными лопатками уменьшится на 20%. Можно считать, что поток в обоих случаях полностью попадает на лопатки колеса гидротурбины и мощность генератора не зависит от угла падения потока воды на гидротурбину. КПД гидрогенератора и уровень воды в водохранилище считать постоянным.



Решение:

В силу принципа неразрывности водяной струи величина расхода воды через гидротурбину в любой ее части остается постоянной

$$Q = S{\cdot}V = const,$$

где S – площадь поперечного потока воды, V – скорость потока в этом сечении.

При этом мощность гидрогенератора равна кинетической энергии элемента потока воды массой m, проходящей через турбину за время t с учетом КПД η.

$$P = \frac{mV^2}{2t}\eta = \frac{\rho SlV^2}{2t}\eta = \frac{\rho SV^3}{2}\eta.$$

Здесь l – длина элемента потока, ρ – плотность воды.

Таким образом, в рамках нашей задачи

$$P \propto SV^3.$$

Откуда, выражая скорость потока через формулу для расхода, получим, что мощность гидрогенератора обратно пропорциональна квадрату сечения потока

$$P \propto \frac{1}{S^2}.$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{1}{0{,}64}$$

Это означает, что уменьшение площади сечения потока на 20% приведет к увеличению мощности генератора в 1,56 раза.

Ответ: мощность генератора возрастет в 1,56 раза.