Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Заочная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11991 для 9 класса

1. Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни многочлена $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 8$. Найдите значение выражения $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3}\right)^{-1}$.

2. Трудясь непрерывно, Пончик и Сиропчик в течение суток съели месячный запас вкусняшек, при этом их прожорливость ночью составляла 80% от их прожорливости днем. Выясните, во сколько раз должна измениться длительность дня, чтобы съесть тот же запас за то же время, если их дневная прожорливость возрастет на 10% (при неизменной ночной)?

3. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \le x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x+1}{2}\right] = 2x.$$

4. Нарисуйте (и обоснуйте) множество всех точек на декартовой плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} |x+2y| + |x-2y| \le 4, \\ |x+2y|^2 \le 9, \\ |x-2y| \le 3. \end{cases}$$

5. Коротая время перед рассветом, суперагенты Алов и Вертов играют в такую игру: Алов выбирает произвольное целое число a_1, Вертов увеличивает или уменьшает его на 2, получая число b_1. Затем каждый по очереди вычисляет свое следующее число по формулам:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 5b_n + n^2, \\ b_{n+1} = 3b_n + 5a_n + n^2 - 2, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Могут ли агенты на каком-то шаге $n > 1$ получить равные числа?