

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17771 для 7 класса

1. Книга о вкусной и здоровой пище людоеда (Г. Остер) предлагает рецепт легкого в приготовлении блюда «Непоседы на вертеле». В закромах непоседа припасено двенадцать непохожих друг на друга шустрых непосед: четыре черненьких, четыре рыженьких и четыре фиолетовых в крапинку, а на вертеле помещается ровно трое. Сколькими разными способами он может составить из них разноцветное блюдо? (Блюдо считается разноцветным при наличии хотя бы двух разных цветов среди трех компонентов.)

Решение.

Имеется по 4 объекта типа А, Б и Ц, всего 12 объектов.

Приведем решение, не использующее формулы комбинаторики.

Посчитаем количество всевозможных различных троек, которые можно из них составить. Первый элемент тройки можно выбрать 12-ю способами, второй – 11-ю и третий – 10-ю способами, итого $12 \cdot 11 \cdot 10$ троек. Однако тройки, составленные из одних и тех же элементов, но стоящих в разном порядке являются идентичными. Всего имеется 6 вариантов расстановки трех элементов в разном порядке. Поэтому общее количество различных троек, составленных из 12-ти элементов равно

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220.$$

Из этого количества нужно исключить те тройки, в которых все объекты принадлежат одному типу. Для этого нужно выяснить, сколько различных троек можно составить из 4-х элементов. Проще всего это найти таким образом. Чтобы получить тройку нужно выбросить один элемент из четырех. Это можно сделать 4-мя разными способами. Значит, количество искомым троек равно 4 для каждого из трех типов А, Б или Ц.

Таким образом, троек, в которых хотя бы два элемента имеют различный тип, будет $220 - 12 = 208$.

Тот же самый ответ, разумеется, можно вычислить как

$$C_{12}^3 - 3C_4^3.$$

Ответ: 208.

2. Существует ли такое трехзначное число A , которое начинается с цифры 1, а если переставить первую цифру в конец, то получится большее число, кратное исходному? Если да, приведите пример такого числа; если нет, объясните, почему.

Решение.

Число A можно представить в виде $A = 100 + x$, где x – некоторое двузначное число ($10 \leq x \leq 99$). После перестановки первой цифры в конец будет получено новое число B , которое запишется как $B = 10x + 1$.

По условию, $B : A$. Следовательно, существует такое натуральное n , что

$$10x + 1 = n \cdot (100 + x),$$

или, выделяя x

$$x \cdot (10 - n) = n \cdot 100 - 1,$$

откуда сразу следует, что $n < 10$.

Дальше можно воспользоваться перебором. Предварительно заметим, что слева стоит нечетное число, заканчивающееся цифрой 9. Поэтому множитель $(10 - n)$ может принимать только значения 1, 3, 7, 9.

При $10 - n = 1 \Rightarrow n = 9$ получаем $x = 899$, что не удовлетворяет условию $x \leq 99$.

При $10 - n = 3 \Rightarrow n = 7$ получаем $x = 699/3 = 233$, что также не удовлетворяет условию $x \leq 99$.

При $10 - n = 7 \Rightarrow n = 3$ получаем $x = 299/7$, что не является целым числом.

При $10 - n = 9 \Rightarrow n = 1$ получаем $x = 11$, следовательно $A = B = 111$. По условию, число B больше, чем A , значит этот вариант нам тоже не подходит.

Ответ: не существует.

3. Шофер суперавтобуса ПАЗ-3206 решил узнать на практике прожорливость своего двигателя (измеряемую в литрах на 100 км пути). Для этого он залил полный бак и начал отсчитывать пробег. Израсходовав весь бак, он снова заполнил его и повторял так несколько раз. Когда бак в очередной раз почти опустел, шофер разделил объем всех потраченных полных баков на пройденное расстояние (в сотнях км) и получил нужную величину. Определите, сколько раз нужно было заправиться, чтобы полученная величина отличалась от истинной не более, чем на 1%, если в момент расчета бак был заполнен не более, чем на четверть. Как изменится ответ, если измерять прожорливость в литрах на 1 км пути?

Решение.

Обозначим объем бака через V , пройденный путь через S (в сотнях км), а остаток топлива в момент расчета через w . Пусть было истрачено k баков.

Тогда вычисленная шофером прожорливость двигателя равна

$$q = \frac{k \cdot V}{S},$$

а истинная равна

$$p = \frac{k \cdot V - w}{S}.$$

Ясно, что $q > p$ и

$$q - p = \frac{w}{S}.$$

Ошибка не превышает 1%, если $\frac{q - p}{p} \leq 0,01$.

Тогда получаем

$$\frac{q - p}{p} = \frac{w}{k \cdot V - w} = \frac{1}{k \cdot \frac{V}{w} - 1} \leq 0,01.$$

Выразим k .

$$k \geq 101 \cdot \frac{w}{V}.$$

Поскольку неравенство должно быть верным для любого значения w в заданном диапазоне, то справа нужно взять максимально возможное значение. Согласно условию, $\frac{w}{V} \leq \frac{1}{4}$, поэтому

$$k \geq 101 \cdot \frac{1}{4} = 25,25.$$

С учетом целочисленности k получаем минимальное значение 26.

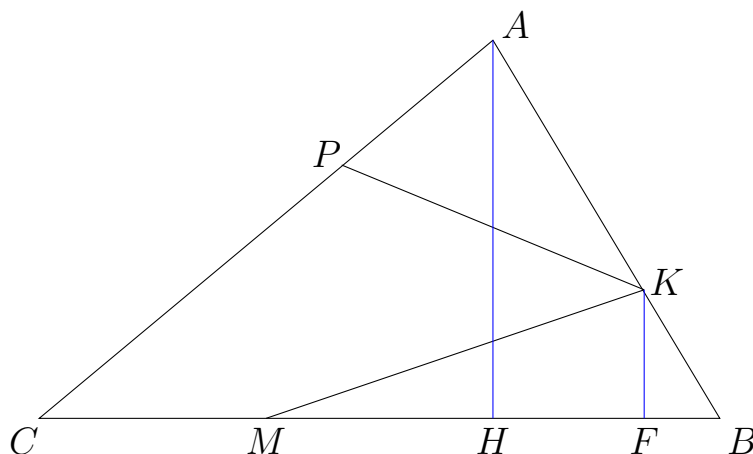
Так как анализируется относительная величина и в условии дано отношение объемов, то ответ не изменится при замене единиц измерения.

Ответ: не менее 26-ти баков; ответ не изменится.

4. В треугольнике ABC точка K делит сторону AB в отношении $1 : 2$, считая от точки B , точка M делит сторону BC в отношении $1 : 2$, считая от точки C , точка P делит сторону CA в отношении $1 : 2$, считая от точки A . В каком диапазоне может находиться отношение площади четырехугольника $CPKM$ к площади всего треугольника ABC ?

Решение.

Найдем вклад треугольника MKB в площадь всего треугольника ABC .



Опустим высоты AH и KF на сторону BC . Из подобия треугольников AHB и KFB получаем

$$\frac{KF}{AH} = \frac{KB}{AB} = \frac{1}{3}.$$

Тогда отношение площадей составит

$$\frac{S_{MKB}}{S_{CAB}} = \frac{KF \cdot MB}{AH \cdot CB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

Аналогичные рассуждения дают

$$\frac{S_{PAK}}{S_{CAB}} = \frac{2}{9}.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{CPKM}}{S_{CAB}} = \frac{S_{CAB} - S_{MKB} - S_{PAK}}{S_{CAB}} = 1 - 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{9}.$$

Ответ: только $5/9$.

5. На съёмочной площадке фильма «Кабачки: вторжение рассады» актёры стали очень капризными. На 6 артистов осталось только 3 роли: одна из них главная, другая – второго плана, а третья эпизодическая. Главный герой появляется на экране чаще всех, герой второго плана – реже, чем главный, а эпизодический персонаж – реже, чем второплановый. Артист Ляпкин говорит, что не будет сниматься, если в главной роли не будет Жабкина. Шапкин откажется от съёмок, если он будет появляться на экране чаще, чем Тапкин. Также Шапкин не работает вместе с Охапкиным. Тапкин не подпишет контракт, если в кино одновременно снимутся и Жабкин, и Охапкин. Тапкин также не участвует, если Охапкин сыграет главную роль или Шапкин сыграет эпизодическую. Тряпкин откажется от роли, если он появится на экране реже, чем Тапкин или Жабкин. Жабкин не хочет играть роль второго плана; он также не хочет сниматься в эпизодической роли, если главную роль или роль второго плана заберет себе Тряпкин. А ещё Жабкин не хочет сниматься вместе с Ляпкиным, если при этом в главной или роли второго плана не засветится Охапкин. Охапкин согласен участвовать в съёмках, если главную роль сыграет либо он сам, либо Тапкин. Каких трех артистов режиссеру надо выбрать на три роли, чтобы учесть все пожелания? Покажите ход своих рассуждений.

Решение

Главная цель задачи – найти такой вариант, где не было бы смысловых противоречий. Начнем с первого логического высказывания и предположим, что Жабкин играет главную роль. Тогда в кино снимается Ляпкин. Но отказывается от съёмок Тряпкин, поскольку он появляется на экране реже Жабкина. Итак, пока из кандидатов остаются Ляпкин, Шапкин, Охапкин и Тапкин. Рассмотрим требования Охапкина: он тоже выбывает, поскольку на главную роль выбрали не его и не Тапкина. Но тогда мы получаем противоречие: из рассуждений вытекает, что Жабкин вообще не снимается, поскольку он не хочет быть в одной картине с Ляпкиным без Охапкина в роли второго плана. Значит, Жабкин не может играть главную роль.

Мы знаем, что Жабкин не хочет играть роль второго плана. Тогда допустим, что Жабкин снимается в эпизоде. Значит, в кино не снимается Ляпкин (у Жабкина не главная роль) и Тряпкин, поскольку Жабкин отказывается сниматься, если Ляпкин играет главную роль или роль второго плана. Остаётся рассмотреть кандидатов Шапкина, Тапкина, Охапкина.

Если участвует Охапкин, то не участвует Шапкин. Тапкин также не снимается, если в кино будут Жабкин и Охапкин одновременно. Таким образом, кандидатов остаётся меньше, чем ролей, и мы вновь получили противоречие. Отсюда следует, что не участвует Охапкин.

Остаются Шапкин и Тапкин. Шапкин не хочет появляться на экране ча-

ще Тапкина, следовательно, Тапкин будет играть главную роль, а Шапкин – роль второго плана. Противоречий не выявлено, все просьбы актёров удовлетворены, следовательно, задача решена.

Ответ: главную роль играет Тапкин, роль второго плана – Шапкин, в эпизоде снимется Жабкин.